E.N.S. SAINT-CLOUD & FONTENAY 1978

Option Sciences Physiques (P')

MATHEMATIQUES II (4 heures)

PRÉLIMINAIRES

Si A est un ensemble contenant l'ensemble B, $A \setminus B$ désigne l'ensemble des éléments de A qui n'appartiennent pas à B.

On dit que F est un sous-corps de $\mathbb{R}$ si F est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ contenant strictement $\{0\}$ et si $F \setminus \{0\}$ est un sous-groupe multiplicatif de $R^* = R \setminus \{0\}$. Ainsi F est lui-même un corps, et on remarquera que F contient $\mathbb{Q}$.

Tous les corps considérés dans ce problème sont des sous-corps de $\mathbb{R}$. On rappelle que si F et G sont deux corps, tels que $F \subset G$, l'application

$$F \times G \longrightarrow G : (x, y) \longmapsto xy,$$

munit G d'une structure d'espace vectoriel sur F.

Soient F, G, L trois sous-corps de $\mathbb{R}$ avec $F \subset G \subset L$. Soient (a_i), $i \in \{1, \ldots, n\}$, une base de G sur F, (b_j), $j \in \{1, \ldots, m\}$, une base de L sur G. DÉMONTRER que $(a_i b_j)$, $(i, j) \in \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, m\}$ est une base de L sur F. En DÉDUIRE la dimension de L sur F en fonction de celles de L sur G et de G sur F.

I

Soit F un sous-corps de $\mathbb{R}$ et α un élément de R^*. On définit le degré de α sur F, que l'on note deg $(\alpha; F)$, de la façon suivante :

deg $(\alpha; F) = \sup \{ m \in \mathbb{N}^* ; (1, \alpha, \ldots, \alpha^{m-1})$ linéairement indépendant sur $F \}$.

Montrer que deg $(\alpha ; F) = 1$ est équivalent à $\alpha \in F$.

1° Dans cette question $\alpha \notin F$ et on suppose qu'il existe a et b deux éléments de F tels que : $\alpha^2 + a\alpha + b = 0$.

Démontrer que l'ensemble $F(\alpha)$ défini par :

$$F(\alpha) = \{ x + y\alpha ;\ x \in F,\ y \in F \}$$

est un sous-corps de $\mathbb{R}$. Quelle est sa dimension en tant qu'espace vectoriel sur F?

Vérifier qu'il existe un élément positif k dans F tel que $F(\alpha) = F(\sqrt{k})$.

Déterminer deg$(\alpha; F)$.

On dit dans ce cas que $F(\alpha)$ est une EXTENSION QUADRATIQUE DE F.

2° On suppose désormais que deg$(\alpha; F) = n$, n entier strictement supérieur à 1.

a. Démontrer qu'il existe un polynôme p de degré n, à coefficients dans F, tel que : $p(\alpha) = 0$.

.../...

Démontrer que p est irréductible sur F, c'est-à-dire que si p_1 et p_2 sont deux polynômes à coefficients dans F tels que : $p = p_1 p_2$, alors p_1 ou p_2 est un polynôme constant.

Démontrer que si q est un polynôme à coefficients dans F tel que : $q(\alpha) = 0$, le reste de la division de q par p est le polynôme nul.

Application : Déterminer $\deg\left(\sqrt[3]{2}\ ; \mathbb{Q}\right)$.

b. Soit $F(\alpha)$ l'espace vectoriel sur F engendré par $(1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1})$.

$$F(\alpha) = \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} a_i \alpha^i \ ; \ a_i \in F \ , \ i \in \{0 \ , \ \ldots \ , \ n-1\} \right\}$$

Vérifier que les puissances α^m, $m \in \mathbb{N}$, appartiennent à $F(\alpha)$. En déduire que $F(\alpha)$ est stable pour la multiplication.

Soit $r \in F(\alpha)$, $r \neq 0$ et soit ρ l'application F-linéaire : $F(\alpha) \to F(\alpha)$, $\rho(s) = rs$. Vérifier que ρ est injective. En déduire que r^{-1} appartient à $F(\alpha)$ et que $F(\alpha)$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$.

(On pourra utiliser le fait qu'un endomorphisme injectif d'un espace vectoriel de dimension finie est surjectif).

II

Dans la suite, $\mathbb{R}^2$ est muni de la distance euclidienne usuelle.

Dans cette partie, F est un sous-corps de $\mathbb{R}$ et $U = F \times F$ est l'ensemble des points à coordonnées dans F.

On note :

$\mathcal{D}$ l'ensemble des droites joignant deux points distincts de U.

$\mathcal{C}$ l'ensemble des cercles centrés en un point de U, de rayon égal à la distance de deux points de U.

1° *a.* Soit Δ une droite appartenant à $\mathcal{D}$. Démontrer que Δ admet au moins une équation à coefficients dans F.

b. Même question que précédemment pour un cercle Γ appartenant à $\mathcal{C}$.

2° Soient Δ_1 et Δ_2 deux droites distinctes de $\mathcal{D}$ sécantes en un point M. Démontrer que $M \in U$.

3° Soient Δ une droite de $\mathcal{D}$ et Γ un cercle de $\mathcal{C}$ possédant au moins un point commun M.

Démontrer que :

- ou bien $M \in U$
- ou bien les coordonnées de M appartiennent à un corps G qui est une extension quadratique de F (voir la définition dans I. 1°).

4° Que peut-on dire d'un point M commun à deux cercles distincts de $\mathcal{C}$?

III

Construction à la règle et au compas

Comme dans la partie II, on considère $\mathbb{R}^2$ muni de la distance euclidienne usuelle et on note : $O = (0,0)$ et $I = (1,0)$.

Avec la règle et le compas, on trace des cercles et des droites et on construit des points selon le procédé récurrent suivant :

Soit E un ensemble de points, $E \subset \mathbb{R}^2$. A partir de E, on construit d'autres points de la manière suivante : On trace les droites déterminées chacune par deux points distincts de E, et les cercles centrés en un point quelconque de E, de rayon égal à la distance entre deux points de E. Les points d'intersection de deux droites distinctes, de deux cercles distincts, d'une droite et d'un cercle, ainsi tracés, sont dits : « POINTS CONSTRUITS À PARTIR DE E ».

On dit qu'un point M est « CONSTRUCTIBLE » s'il existe une suite finie de points $(M_1, \ldots, M_n = M)$ telle que M_1 soit construit à partir de l'ensemble $\{O, I\}$ et pour $i \in \{2, \ldots, n\}$, M_i soit construit à partir de l'ensemble $\{O, I, M_1, \ldots, M_{i-1}\}$.

On dit qu'un nombre réel est « CONSTRUCTIBLE » s'il est l'une des coordonnées d'un point constructible.

1° Montrer (éventuellement par un dessin s'il indique clairement les opérations effectuées) que :

a. Si A, B et C sont trois points constructibles, le point D tel que ABCD soit un parallélogramme est constructible.

b. Le point $J = (0,1)$ est constructible.

c. Les points à coordonnées entières sont constructibles.

2° *a.* Soit M un point constructible. Montrer qu'il existe une suite finie de sous-corps de $\mathbb{R}$, $(F_0, F_1 \ldots, F_n)$, vérifiant la propriété :

- $\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset \ldots \subset F_n$
- Pour chaque entier i, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, F_{i+1} est une extension quadratique de F_i.
- Les coordonnées de M appartiennent à F_n.

Une telle suite sera appelée une « TOUR D'EXTENSION QUADRATIQUE » (en abrégé : T.E.Q.).

.../...

Démontrer que dans une telle T.E.Q. la dimension de F_n sur $\mathbb{Q}$ est 2^n.

b. En déduire que si α est un réel tel que deg $(\alpha; \mathbb{Q})$ n'est pas une puissance de 2, α n'est pas un réel constructible. $\sqrt[3]{2}$ est-il constructible

3° On se propose de démontrer la réciproque du 2°.

a. Montrer (éventuellement par un dessin) que :

— si α et β sont des réels constructibles, il en est de même de $\alpha - \beta$ et α/β $(\beta \neq 0)$;

— si α est constructible et positif, il en est de même de $\sqrt{\alpha}$.

b. Soit $\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset \ldots \subset F_n$ une T.E.Q. Montrer que tous les éléments de F_n sont constructibles.

4° Déterminer l'expression de $\cos 5\theta$ en fonction de $\cos \theta$. En déduire que $\cos \frac{2\pi}{5}$ est racine d'un polynôme à coefficients entiers.

Déterminer deg $\left(\cos \frac{2\pi}{5}; \mathbb{Q}\right)$.

Peut-on construire, à la règle et au compas, un pentagone régulier inscrit dans le cercle unité (de centre O et passant par I)?

IV

On se propose de montrer qu'il existe des réels r vérifiant deg $(r; \mathbb{Q}) = 4$ mais qui ne sont pas constructibles.

1° Soit p un polynôme à coefficients entiers :

$$p(x) = \alpha_0 + \ldots + \alpha_n x^n, \quad \text{avec} \quad \alpha_0 \alpha_n \neq 0.$$

On suppose que le rationnel a/b (a et b entiers premiers entre eux) est une racine de p. Démontrer qu'alors a divise α_0 et b divise α_n.

2° On suppose désormais que :

$$p(x) = x^4 - 4x + 2$$

Démontrer que p n'admet pas de racine rationnelle mais qu'il a exactement deux racines réelles que l'on notera : r_1 et r_2.

3° Démontrer qu'il existe (a, b, c, d) dans $\mathbb{R}^4$ tels que :

$$p(x) = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d).$$

4° Démontrer que, pour toute factorisation du type précédent, le réel t, $t = b + d$, est racine d'un polynôme du 3e degré à déterminer.

En déduire que t n'est pas rationnel et déterminer deg $(t; \mathbb{Q})$.

5° Démontrer que p est irréductible sur $\mathbb{Q}$ et en déduire deg $(r_i; \mathbb{Q})$ pour $i \in \{1, 2\}$.

6° Démontrer qu'au moins l'un des deux réels r_i, $i \in \{1, 2\}$ n'est pas constructible.

V

La construction à la règle et au compas des bissectrices d'un angle est bien connue. On se propose de donner un critère pour qu'un angle puisse être trisecté à la règle et au compas.

On suppose donné l'angle φ, c'est-à-dire le point A = (cos φ, sin φ). On utilise les constructions à la règle et au compas comme dans la partie III.

On dit que le point M est φ – CONSTRUCTIBLE s'il existe une suite finie de points $(M_1, \ldots, M_n = M)$ telle que M_1 soit construit à partir de l'ensemble $\{O, I, A\}$ et, pour $i \in \{2, \ldots, n\}$, M_i soit construit à partir de l'ensemble $\{O, I, A, M_1, \ldots, M_{i-1}\}$.

On dit qu'un nombre réel est φ – CONSTRUCTIBLE s'il est l'une des coordonnées d'un point φ – constructible.

On dit enfin que φ est TRISECTABLE si $\cos \frac{\varphi}{3}$ est φ – constructible.

1° Soit $\mathbb{Q}_\varphi$ le plus petit sous-corps de $\mathbb{R}$ contenant cos φ. Démontrer que $\mathbb{Q}_\varphi$ est inclus dans l'ensemble des réels φ – constructibles.

2° Exprimer cos φ en fonction de $\cos \frac{\varphi}{3}$ et en déduire que :

$$\deg\left(\cos \frac{\varphi}{3}; \mathbb{Q}_\varphi\right) \leqslant 3.$$

3° Démontrer que φ est trisectable si et seulement si :

$$\deg\left(\cos \frac{\varphi}{3}; \mathbb{Q}_\varphi\right) \leqslant 2.$$

En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur le polynôme p : $p(x) = 4x^3 - 3x - \cos \varphi$ pour que φ soit trisectable.

4° $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$ sont-ils trisectables?

-FIN-

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail